٢-٩ المتغير العشوائي المنفصل | Math Show | الصف الحادي عشر متقدم

قطعة النقود المعدنية

عند رمي قطعة نقود معدنية مرتين (أو رمي قطعة واحدة مرة) فإن جميع النواتج الممكنة يمكن تمثيلها في المخطط الاحتمالي التالي:



		القطعة الاولى	
		ص	ك
القطعة الثانية	ص	ص ص	ص ك
	ك	ك ص	ك ك

قامت نور برصد عدد الصور الظاهرة في كل عنصر من النواتج الممكنة

فإن عدد الصور { ٠، ١، ٢} ويمكن تسمية عدد مرات ظهور الصورة على الوجه العلوي بالمتغير العشوائي ويرمز له بالرمز س

التوزيع الاحتمالي

لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي الذي تم رصده قيمة احتمالية مناظرة ل(س) تساوي النسبة بين عدد مرات ظهوره وعدد النواتج الممكنة

س	٠	١	٢	
ل(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\sum ل(س) = ١$

مثال (١)

حجر نرد منتظم له أربعة أوجه مرقمة ١، ٢، ٣، ٤. رُمي حجر النرد مرتَين، وكان المتغير العشوائي (س) يمثل مجموع الرقمان الظاهران، أنشئ جدول توزيع احتمالي للمتغيّر (س)

الحل

		الرمية الاولى			
		١	٢	٣	٤
الرمية الثانية	١	٢	٣	٤	٥
	٢	٣	٤	٥	٦
	٣	٤	٥	٦	٧
	٤	٥	٦	٧	٨

المتغير العشوائي س = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	
ل(س)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$	$\sum ل(س) = ١$

مثال (٢)

الشكل التالي كيس به ٧ كرات، اثنتان باللون الأحمر و ٥ باللون الأزرق سحبت كرتان معاً وكان المتغير العشوائي ص يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة. أنشئ جدول توزيع احتمالي للمتغيّر (ص)





الحل

عدد النواتج الممكنة = $\binom{7}{2}$ = ٢١

قيم المتغير العشوائي (ص)= { ٠، ١، ٢}

ل(ص = ٠) = $\frac{\binom{2}{0}\times\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{10}{21}$

ل(ص = ١) = $\frac{\binom{2}{1}\times\binom{5}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{10}{21}$

ل(ص = ٢) = $\frac{\binom{2}{2}\times\binom{5}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{21}$

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

س	٠	١	٢	
ل(س)	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\sum$ ل(س) = ١

تمارين كتاب الطالب

(١) يمثل الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (س)

س	٢	٣	٤	٥
ل(س)	ب	٢ب	$\frac{1}{2}$ب	٣ب

(أ) أوجد قيمة ب (ب) احسب قيمة ل(٢<س<٥)

الحل

$\sum$ ل(س) = ١

∴ ب + ٢ب + $\frac{1}{2}$ ب + ٣ب =١

٦,٥ ب = ١ $\frac{13}{2}$ ب = ١

∴ ب = $\frac{2}{13}$

ل(٢<س<٥) = ل(س=٣) + ل(س=٤)

= ٢ × $\frac{2}{13}$ + $\frac{1}{2}$ × $\frac{2}{13}$ = $\frac{5}{13}$

(٢) يمثل الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (ح)

ح	٣	٦	٩	١٢	١٥
ل(ح)	٢ك	ك^{٢}	$\frac{ك}{٢}$	$\frac{٤}{٥}$-٣ك	$\frac{١٣}{٥٠}$

(أ) اكتب معادلة بدلالة ك ثم حلها

(ب) لماذا حلّ واحد فقط من حلولك مقبول؟ اشرح إجابتك

(ج) أوجد ل(٦ ≥ ح > ١٠)

الحل

$\sum$ ل(ع) = ١

٢ك + ك^{٢} + $\frac{ك}{٢}$ + $\frac{٤}{٥}$ -٣ك + $\frac{١٣}{٥٠}$ = ١

∴ ك^{٢} − $\frac{ك}{٢}$ + $\frac{٥٣}{٥٠}$ = ١

∴ ك^{٢} − $\frac{ك}{٢}$ + $\frac{٥٣}{٥٠}$ -١ = ٠

∴ ك^{٢} − $\frac{ك}{٢}$ + $\frac{٣}{٥٠}$ = ٠

∴ ك^{٢} − ٠,٥ ك + ٠,٠٦ = ٠

(ك -٠,٢) (ك-٠,٣) = ٠

ك = ٠,٢ ك=٠,٣

يوجد حل واحد فقط لقيمة ك وهو ك =٠,٢ لأن بالتعويض عن قيمة ك = ٠,٣ يكون ل(ح=١٢) = ٠,٨ -٣×٠,٣ = -٠,١
ولا يمكن أن يكون الاح٠س=تمال سالباً

ل(٦ ≥ ح > ١٠) = ل(ح=٦) + ل(ح=٩)

ل(٦ ≥ ح > ١٠) = (٠,٢)^{٢} + (٠,٢) ÷٢ = ٠,١٤

---

(٣) في مباراة كرة السلة احتمال أن ينجح غانم في تسجيل كل هدف يساوي $\frac{٧}{٩}$ إذا نفّذ محاولتين، حيث المتغيّر العشوائي المنفصل (س) يمثل ’عدد مرات تسجيل هدف’

(أ) بين أن ل(س=٠) = $\frac{٤}{٨١}$

(ب) أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س)

الحل

عند تنفيذ محاولتين فإن فرص غانم في التسجيل هي أن يسجل واحدة أو اثنتين أو لا يسجل

س= {٠، ١، ٢}

احتمال تسجيل هدف = $\frac{٧}{٩}$ احتمال عدم تسجيل هدف = $\frac{٢}{٩}$

س	٠	١	٢	
	لا يسجل الأولى ولا الثانية	يسجل الأولى أو الثانية أو العكس	يسجل الأولى و الثانية	
ل(س)	$\frac{٢}{٩} \times \frac{٢}{٩} = \frac{٤}{٨١}$	$\frac{٢}{٩} \times \frac{٧}{٩} \times ٢ = \frac{٢٨}{٨١}$	$\frac{٧}{٩} \times \frac{٧}{٩} = \frac{٤٩}{٨١}$	$\sum$ ل(س) = ١

(٤) رُمي حجر نرد منتظم مرتّين له ٤ أوجه مرقمة بالأرقام ١، ٢، ٣، ٥ إذا عرف المتغيّر (س) بأنه مجموع العددَين الظاهرَين على وجهَي الحجرَين

(أ) بين أن ل(س=٨) = $\frac{١}{٨}$

(ب) أنشئ جدول التوزيـع الاحتمالي للمتغيّر (س)، ثم أوجد ل(س > ٦)

الحل

الرمية الثانية \ الرمية الاولى	١	٢	٣	٥
١	٢	٣	٤	٦
٢	٣	٤	٥	٧
٣	٤	٥	٦	٨
٥	٦	٧	٨	١٠

العدد ٨ يظهر كمجموع العددين (٣ و ٥) أو (٥ و ٣) أي فرصتان من أصل ١٦ فرصة

∴ل(س=٨) = $\frac{١}{٨}$

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	١٠	
ل(س)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$	$\sum$ ل(س) = ١

ل(س > ٦) = ل(ح=٧) + ل(ح=٨) + ل(ح=٩)+ ل(ح=١٠)

ل(س > ٦) = $\frac{٢}{١٦}$ + $\frac{٢}{١٦}$ + $\frac{١}{١٦}$ = $\frac{٥}{١٦}$

ل(س > ٦) = $\frac{٥}{١٦}$

(٥) (ق) متغير عشوائي منفصل حيث ق ∈ {٣، ٤، ٥، ٦}

(أ) اذا علمت أن ل(ق) = ج ق^{٢} فأوجد قيمة الثابت ج

(ب) أوجد ل(ق>٤)

الحل



ق	٣	٤	٥	٦
ل(ق)	٩ج	١٦ج	٢٥ج	٣٦ج

∴ ٩ج + ١٦ج + ٢٥ج +٣٦ج = ١

٨٦ ج = ١ ج = $\frac{١}{٨٦}$

ل(ق>٤) = ل(ق=٥) + ل(ق=٦)

ل(ق>٤) = ٢٥ ج + ٣٦ ج = ٦١ ج ل(ق>٤) = $\frac{٦١}{٨٦}$

---

(٦) اختير أربعة كتب عشوائيًا من صندوق يحتوي على ١٠ روايات، و ١٠ مراجع، و ٥ قواميس. يمثل المتغيّر العشوائي (ن) عدد الروايات التي تمّ اختيارها.

(أ) أوجِد قيمة ل(ن = ٢) لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

(ب) حدّد أيّهما أكثر إمكانية للحدوث ن = ٠ أم ن = ٤، وبرّر إجابتك.

الحل

ل(ن = ٢) = $\frac{\binom{١٠}{٢}\times\binom{١٥}{٢}}{\binom{٢٥}{٤}}$ = ٠,٣٧٤

ل(ن = ٠) = $\frac{\binom{١٠}{٠}\times\binom{١٥}{٤}}{\binom{٢٥}{٤}}$ = ٠,١٠٨ ل(ن = ٤) = $\frac{\binom{١٠}{٤}\times\binom{١٥}{٠}}{\binom{٢٥}{٤}}$ = ٠,٠١٧

بالتالي يكون إمكانية حدوث ن = ٤ أكبر

(٧) في لعبة تدوير قرص منتظم له أربعة أجزاء مرقمة بالأرقام ٠، ١، ٢، ٣، إذا دوّر لاعب القرص وظهر العدد ١أو ٢ أو ٣ فتكون هي درجته. وإذا ظهر العدد(٠) عندها يدوّر اللاعب قرصًا منتظمًا، أجزاؤه الثلاثة مرقمة بالأرقام ٠، ١، ٢ وتكون درجته هو العدد الذي يظهر نتيجة التدوير. المتغيّر (س) يمثل درجة اللاعب

(أ) بين أن ل(س=٠) = $\frac{١}{١٢}$

(ب) أنشئ جدول التوزيـع الاحتمالي للمتغيّر (س) ثم أوجِد احتمال أن تكون قيمة س عددًا أوليًا

الحل



القرص ٢		القرص ١			
		٠	١	٢	٣
	٠	٠	١	٢	٣
	١	١	١	٢	٣
	٢	٢	١	٢	٣

من مخطط الفضاء الاحتمالي ل(س=٠) = $\frac{١}{١٢}$

س	٠	١	٢	٣	
ل(س)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٤}{١٢}$	$\frac{٤}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$	$\sum$ ل(س) = ١

احتمال أن تكون س عدداً أولياً = ل(س=٢) + ل(س=٣)

احتمال أن تكون س عدداً أولياً = $\frac{٤}{١٢}$ + $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{٧}{١٢}$

---

(٨) المتغير العشوائي المنفصل (ر) حيث ر ∈ { ١، ٣، ٥، ٧}، اذا علمت أن ل(ر) = $\frac{ك(ر+١)}{ر+٢}$

(أ) أوجد قيمة ك (ب) أوجد قيمة ل(ر ≥ ٤)

الحل

ر	١	٣	٥	٧
ل(س)	$\frac{٢ك}{٣}$	$\frac{٤ك}{٥}$	$\frac{٦ك}{٧}$	$\frac{٨ك}{٩}$

$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\frac{8}{9}$
$\frac{1012}{315}$

ك = $\frac{٣١٥}{١٠١٢}$

ل(ر ≥ ٤) = ل(س=١) + ل(س=٣) = $\frac{٢}{٣} \times \frac{٣١٥}{١٠١٢} + \frac{٤}{٥} \times \frac{٣١٥}{١٠١٢}$ =

$\frac{2}{3}\times\frac{315}{1012}+\frac{4}{5}\times\frac{315}{1012}$
$\frac{21}{46}$

ل(ر ≥ ٤) = $\frac{٢١}{٤٦}$